Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a X-a
Barem de corectare și notare

1. Demonstrați că pentru orice $z \in \boldsymbol{C}$ cu $|z| = 1$ are loc inegalitatea:
$1012 \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \cdots + |1+z^{2025}| \geq 2024.$

S.G.M. 10/2024

Soluție:

$1012 \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \cdots + |1+z^{2025}| =$

$= \sum_{k=1}^{1012} (|1+z| + |1+z^{2k+1}|) + \sum_{k=1}^{1012} |1+z^{2k}| \geq$ ...2p

$\geq \sum_{k=1}^{1012} |1+z-(1+z^{2k+1})| + \sum_{k=1}^{1012} |1+z^{2k}| =$ ...2p

$= \sum_{k=1}^{1012} |z| \cdot |1-z^{2k}| + \sum_{k=1}^{1012} |1+z^{2k}| = \sum_{k=1}^{1012} (|1-z^{2k}| + |1+z^{2k}|) \geq$ ...2p

$\geq \sum_{k=1}^{1012} |1-z^{2k}+1+z^{2k}| = \sum_{k=1}^{1012} 2 = 2024$ ...1p

2. Determinați perechile de numere reale pozitive (x, y) care verifică simultan condițiile:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x\sqrt{x}} - \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = 7 \\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = 3 \end{cases}$$

Soluție:

Sistemul de ecuații este echivalent cu

$$\begin{cases} x^{\frac{3}{8}} - y^{\frac{3}{8}} = 7 \\ x^{\frac{1}{8}} + y^{\frac{1}{8}} = 3 \end{cases}$$ ...2p

Notând $x^{\frac{1}{8}} = a > 0$ și $x^{\frac{1}{8}} = b > 0$, sistemul devine $\begin{cases} a^3 - b^3 = 7 \\ a + b = 3 \end{cases}$ ...1p

Cum $a = 3 - b \Rightarrow (3-b)^3 - b^3 = 7 \Leftrightarrow 2b^3 - 9b^2 + 27b - 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2b^3 - 2b^2 - 7b^2 + 7b + 20b - 20 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(2b^2 - 7b + 20) = 0$ ...2p

cu unica soluție reală pozitivă $b = 1$, de unde a= 2 ...1p

Deci $(x, y) = (2^8, 1)$ ...1p

3. Dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, demonstrați că:

a) $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$

b) $\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a \geq \log_a b + \log_b c + \log_c a$

Soluție:

a) Din ipoteză avem că $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a \in (0, +\infty)$. Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media geometrică pentru aceste numere obținem: ...1p

$\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} = 3$ ..1p

b) **Metoda 1**

Folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, obținem:

$(1 \cdot \log_a b + 1 \cdot \log_b c + 1 \cdot \log_c a)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)\,(\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a)$

$\Leftrightarrow (\log_a b + \log_b c + \log_c a)^2 \leq 3 \cdot (\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a)$ ...2p

Folosind subpunctul a), rezultă că

$(\log_a b + \log_b c + \log_c a)^2 \leq (\log_a b + \log_b c + \log_c a) \cdot (\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a)$ ...2p

$\Rightarrow \log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a \geq \log_a b + \log_b c + \log_c a$ ...1p

Metoda 2

$$\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a = \frac{4\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a}{6} +$$

$$+\frac{\log_a^2 b + 4\log_b^2 c + \log_c^2 a}{6} + \frac{\log_a^2 b + \log_b^2 c + 4\log_c^2 a}{6} \geq$$ ...2p

$$\geq \sqrt[6]{\log_a^8 b \log_b^2 c \log_c^2 a} + \sqrt[6]{\log_a^2 b \log_b^8 c \log_c^2 a} + \sqrt[6]{\log_a^2 b \log_b^2 c \log_c^8 a} =$$ ...2p

$$= \log_a b + \log_b c + \log_c a$$ ...1p

4. Se consideră punctele distincte A, B, C de afixe z_A, z_B și respectiv z_C, unde z_A, z_B, z_C sunt numere complexe cu $|z_A| = |z_B| = |z_C|$. Demonstrați că:

a) $z_A \cdot |z_B - z_C| + z_B \cdot |z_C - z_A| + z_C \cdot |z_A - z_B| = 0$ dacă și numai dacă $\Delta\, ABC$ este echilateral.

b) $z_A^3 \cdot (z_B - z_C) + z_B^3 \cdot (z_C - z_A) + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) = 0$ dacă și numai dacă $\Delta\, ABC$ este echilateral.

Soluție:

Din ipoteză rezultă că centrul cercului circumscris $\Delta\, ABC$ este originea planului complex O. ...1p

a) Notând cu $a, b, c \in \boldsymbol{R}^*$ lungimile laturilor $[BC], [AC]$ și respectiv $[AB]$, relația din ipoteză este echivalentă cu $az_A + bz_B + cz_C = 0 \Leftrightarrow \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a+b+c} = 0 \Leftrightarrow z_I = 0 \Leftrightarrow$ ..1p

$\Leftrightarrow I = O \Leftrightarrow \Delta\, ABC$ este echilateral, unde $I(z_I)$ este centrul cercului înscris în $\Delta\, ABC$. ..1p

b) $z_A^3 \cdot (z_B - z_C) + z_B^3 \cdot (z_C - z_A) + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) =$

$= z_A^3 z_B - z_A^3 z_C + z_B^3 z_C - z_B^3 z_A + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) =$

$= z_A z_B (z_A^2 - z_B^2) - z_C (z_A^3 - z_B^3) + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) =$

$= (z_A - z_B)[z_A^2 (z_B - z_C) + z_A z_B (z_B - z_C) - z_C (z_B^2 - z_C^2)] =$ ...1p

$= (z_A - z_B)(z_B - z_C)(z_A^2 - z_C^2 + z_A z_B - z_C z_B) =$

$= (z_A - z_B)(z_B - z_C)(z_A - z_C)(z_A + z_B + z_C)$ ...1p

Cum z_A, z_B, z_C sunt numere complexe nenule, distincte două câte două, avem că

$z_A^3 \cdot (z_B - z_C) + z_B^3 \cdot (z_C - z_A) + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) = 0 \Leftrightarrow z_A + z_B + z_C = 0 \Leftrightarrow$ ...1p

$\Leftrightarrow \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 0 \Leftrightarrow z_G = 0 \Leftrightarrow G = O \Leftrightarrow \Delta\, ABC$ este echilateral, unde $G(z_G)$ este centrul de greutate al $\Delta\, ABC$. ...1p