Inspectoratul Școlar Județean Timiș | Societatea de Științe Matematice din România | Ministerul Educației și Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a X-a

1. Demonstrați că pentru orice $z \in \boldsymbol{C}$ cu $|z| = 1$ are loc inegalitatea:
$$1012 \cdot |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \cdots + |1+z^{2025}| \geq 2024.$$
S.G.M. 10/2024

2. Determinați perechile de numere reale pozitive (x, y) care verifică simultan condițiile:
$$\begin{cases} \sqrt[4]{x\sqrt{x}} - \sqrt[4]{y\sqrt{y}} = 7 \\ \sqrt[14]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} + \sqrt[14]{y\sqrt{y\sqrt{y}}} = 3 \end{cases}$$

3. Dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, +\infty)$, demonstrați că:

a) $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$

b) $\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a \geq \log_a b + \log_b c + \log_c a$

4. Se consideră punctele distincte A, B, C de afixe z_A, z_B și respectiv z_C, unde z_A, z_B, z_C sunt numere complexe cu $|z_A| = |z_B| = |z_C|$. Demonstrați că:

a) $z_A \cdot |z_B - z_C| + z_B \cdot |z_C - z_A| + z_C \cdot |z_A - z_B| = 0$ dacă și numai dacă ΔABC este echilateral.

b) $z_A^3 \cdot (z_B - z_C) + z_B^3 \cdot (z_C - z_A) + z_C^3 \cdot (z_A - z_B) = 0$ dacă și numai dacă ΔABC este echilateral.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.