

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a XI-a
Barem de corectare și notare

1. a) Se consideră matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $X^{2025} = X^{2024}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

Soluție: Din Relația Cayley-Hamilton, se obține: $X^2 - \text{tr } X \cdot X + \det X \cdot I_2 = O_2$1 punct

Cazul I: $\det X = 0 \Rightarrow X^2 = \text{tr } X \cdot X$. Inductiv, $X^n = (\text{tr } X)^{n-1} \cdot X, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Deci: $(\text{tr } X)^{2024} \cdot X = (\text{tr } X)^{2023} \cdot X$. Se disting următoarele situații:

i) $\text{tr } X = 0 \Rightarrow X^2 = O_2 \Rightarrow X^3 = O_2 \Rightarrow X^2 = X^3$.

ii) $\text{tr } X = 1 \Rightarrow X^2 = X \Rightarrow X^3 = X^2 = X$.

iii) $X = O_2 \Rightarrow X^2 = X^3 = O_2$1 punct

Cazul II: $\det X \neq 0 \Rightarrow X$ inversabilă. În relația $X^{2025} = X^{2024}$ se înmulțește cu $(X^{-1})^{2024} = X^{-2024}$ și se obține $X = I_2 \Rightarrow X^2 = X^3 = I_2$1 punct

b) Determinați $A \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluție:

$A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I_3)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$1punct

Notăm $A - I_3 = B$ și $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = C$.

Se determină matricea B cu proprietatea $B^3 = C$.

Din Relația Cayley-Hamilton și $(\det B)^3 = \det C = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ se obține $B^2 - \text{tr } B \cdot B = O_2 \Rightarrow$

$B^3 = \text{tr } B \cdot B^2 \Rightarrow \left. \begin{matrix} C = (\text{tr } B)^2 \cdot B \\ C \neq O_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$1 punct

$B = \frac{1}{(\text{tr } B)^2} \cdot C \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{(a+d)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$1 punct

$A - I_2 = B \Rightarrow A = B + I_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{\sqrt[3]{25}} & \frac{1}{\sqrt[3]{25}} \\ \frac{6}{\sqrt[3]{25}} & 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{25}} \end{pmatrix}$1 punct

2. Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, cu proprietatea $A^2 + A + I_n = O_n$.

a) Demonstrați că matricea A este inversabilă și aflați-i inversa;

b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea $\det(A^n + I_n) = 2^{2025}$.

Soluție:

a) $A^2 + A + I_3 = O_3 \Rightarrow A(A + I_3) = -I_3 \Rightarrow A(-A - I_3) = I_3 \dots\dots\dots 2\text{puncte}$
 $\Rightarrow A^{-1} = -A - I_3 \dots\dots\dots 1\text{punct}$

b) $A^2 + A + I_n = O_n \Rightarrow A^3 + \underbrace{A^2 + A}_{=-I_n} = O_n \Rightarrow A^3 = I_n \Rightarrow \det(A) = 1 \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Cazul I: $n = 3k \Rightarrow \det(2I_n) = 2^{2025} \Rightarrow n = 2025 \in M_3 \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Cazul II: $n = 3k + 1 \Rightarrow \det(A + I_n) = 2^{2025} \Rightarrow \det(-A^2) = 2^{2025} \Rightarrow (-1)^n = 2^{2025}$ imposibil.....1punct

Cazul III: $n = 3k + 2 \Rightarrow \det(A^2 + I_n) = 2^{2025} \Rightarrow (-1)^n = 2^{2025}$ imposibil.....1punct

3. Calculați limitele:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^{2n}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \{\sqrt{n^2+k}\}}{n}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a.

Soluție:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{5} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\frac{2}{5^n-1} + \frac{4}{3^n-1}}{2} - 1 \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\left(\frac{2}{5^n-1}\right) + \left(\frac{4}{3^n-1}\right)}{2} \right)^{2n} \dots\dots\dots 1\text{punct}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\left(\frac{2}{5^n-1}\right) + \left(\frac{4}{3^n-1}\right)}{2} \right)^{\frac{\left(\frac{2}{5^n-1}\right) + \left(\frac{4}{3^n-1}\right)}{2} \cdot 2n} \right] = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5^n-1} \cdot 2 + \frac{4}{3^n-1} \cdot 4 \right)} \dots\dots\dots 1\text{punct}$

$= e^{2 \ln 5 + 4 \ln 3} = e^{\ln 25 \cdot 81} = 25 \cdot 81 = 2025 \dots\dots\dots 1\text{punct}$

b) $\{\sqrt{n^2+k}\} = \sqrt{n^2+k} - [\sqrt{n^2+k}] \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

Din $n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+k} < \sqrt{(n+1)^2} = n+1 \Rightarrow [\sqrt{n^2+k}] = n \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Se obține: $\{\sqrt{n^2+k}\} = \sqrt{n^2+k} - n = \frac{n^2+k-n^2}{\sqrt{n^2+k}+n} = \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Din $\frac{k}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} < \frac{k}{\sqrt{n^2+1}+n}$, prin însumare, se obține:

$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+n}+n} < \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+k}+n} < \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+1}+n} \dots\dots\dots 1\text{punct}$

Din $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n(\sqrt{n^2+n}+n)} = \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2+1}+n}$, via Criteriului Cleștelui, se

obține: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \{\sqrt{n^2+k}\}}{n} = \frac{1}{4} \dots\dots\dots 1\text{punct}$

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{e^{x_n}}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = 1$.

Soluție:

Din $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{e^{x_n}} \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.....1punct

Presupunem că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior, atunci din Criteriul lui Weierstrass, se obține că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \mathbb{R}$.

Se trece la limită în relația de recurență $l = l + e^{-l} \Rightarrow e^{-l} = 0$, absurd $\Rightarrow l = \infty$1punct

Din șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ strict crescător și nemărginit, se aplică Stolz- Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{n} \cdot e^{x_n} = \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \frac{e^{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cdot \frac{e^{x_n}}{n} = \ln e \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{n} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Se aplică din nou lema lui Stolz Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{x_{n+1}} - e^{x_n}}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{x_n} (e^{x_{n+1} - x_n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_{n+1} - x_n} (e^{x_{n+1} - x_n} - 1) = 1 \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$