Inspectoratul Școlar Județean Timiș | Societatea de Științe Matematice din România | Ministerul Educației și Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a XI-a

1. a) Se consideră matricea $X \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $X^{2025} = X^{2024}$. Demonstrați că $X^3 = X^2$.

b) Determinați $A \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A^3 - 3A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2,$ cu proprietatea $A^2 + A + I_n = O_n$.

a) Demonstrați că matricea A este inversabilă și aflați-i inversa;

b) Determinați numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea $det(A^n + I_n) = 2^{2025}$.

3. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5^{\frac{2}{n}} + 3^{\frac{4}{n}}}{2}\right)^{2n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \{\sqrt{n^2+k}\}}{n}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real a.

4. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{e^{x_n}}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

NOTĂ:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.