Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Fie $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z_3\ ,\ a \neq \hat{0}\ sau\ b \neq \hat{0}\right\}$. Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Soluţie:

Demonstrează că înmulțirea este corect definită pe *G* 2p
Justifică asociativitatea și comutativitatea înmulțirii pe *G* 2p
Determină elementul neutru din mulțimea *G* 1p
Demonstrează că orice matrice din *G* este inversabilă în *G* 2p

2. Să se determine F, primitiva funcției $f: [0, \pi) \to R$, $f(x) = \frac{x}{1+cosx}$, dacă reprezentarea geometrică a graficului primitivei intersectează axa ordonatelor cu o unitate deasupra originii sistemului cartezian de coordonate.

Soluţie:

$\int f(x)dx = \int \frac{x}{1+cosx}dx = \int \frac{x}{2cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx =$ 1p
$= \int x\left(tg\frac{x}{2}\right)' dx =$ 1p
$= x\left(tg\frac{x}{2}\right) - \int \left(tg\frac{x}{2}\right)dx =$ 2p
$= x\left(tg\frac{x}{2}\right) + 2ln\left(cos\frac{x}{2}\right) + C$ 2p
Dacă $F(0) = 1$ se obține $C = 1$ deci $F(x) = x\left(tg\frac{x}{2}\right) + 2ln\left(cos\frac{x}{2}\right) + 1$ 1p

3. Să se determine automorfismele grupului (Z,+).

Soluţie:

Automorfismul este funcția bijectivă $f: Z \to Z$ care verifică egalitatea
$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in Z$. 2p
Soluțiile ecuației funcționale (de tip Cauchy) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
sunt funcțiile $f: Z \to Z\ f(x) = nx,\ n \in Z$. 3p
Pentru ca funcția să fie bijectivă, $n \in \{-1,1\}$. 1p
Deci automorfismele sunt $f: Z \to Z,\ f(x) = \pm x$. 1p

4. Fie $f: R \to R$ o funcție continuă și periodică de perioadă 1. Arătați că pentru orice $a \in R$ are loc egalitatea: $\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$.

Soluție:

Dacă f are perioada 1 atunci are ca perioadă orice număr $k \in Z$.
Deci $f(x) = f(x+k)\ \forall x \in R, \forall k \in Z$ (1) ……………………………………………………..1p

Notăm $k = [a+1] = [a] + 1$, $a < k \le a+1$
$\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_a^k f(x)dx + \int_k^{a+1} f(x)dx$ ……………………………………………………1p

Notăm $x = y + k$, ținem cont de relația (1) și obținem
$\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_{a-k}^0 f(y)dy + \int_0^{a-k+1} f(y)dy$ ……………………………………………………..2p

În prima integrală notăm $y = t - 1$, ținem cont de relația (1) și obținem
$\int_{a-k}^0 f(y)dy = \int_{a-k+1}^1 f(t)dt$ ………………………………………………………………….2p

Deci $\int_a^{a+1} f(x)dx = \int_{a-k+1}^1 f(t)dt + \int_0^{a-k+1} f(y)dy = \int_0^1 f(x)dx$. …………………………….1p