

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a XII-a

1. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$. Arătați că (G, \cdot) este grup abelian.
2. Să se determine F , primitiva funcției $f: [0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+\cos x}$, cu proprietatea că reprezentarea geometrică a graficului primitivei intersectează axa ordonatelor cu o unitate deasupra originii sistemului cartezian de coordonate.
3. Să se determine automorfismele grupului $(\mathbb{Z}, +)$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și periodică de perioadă 1. Arătați că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea: $\int_a^{a+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

(SGM octombrie 2024)

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.