

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
7.02.2025

clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Arătați că pentru orice n număr natural nenul, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.

Soluție:

Pentru $n=1$ avem $9|0$ **1punct**

Presupunem că $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9 și demonstrăm că $2^{2n+1} - (-2)^n - 1$ se divide cu 9

$$2^{2n+1} - (-2)^n - 1 = 4 \cdot 2^{2n-1} + 2(-2)^{n-1} - 1 = 4 \left[2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1 \right] + 3 \left[2 \cdot (-2)^{n-1} + 1 \right] \dots \text{2puncte}$$

Mai rămâne să arătăm că 3 divide $2 \cdot (-2)^{n-1} + 1$

Pentru $n=1$ obținem că 3 divide 0, adevărat. **1punct**

Presupunem că 3 divide $2 \cdot (-2)^{n-1} + 1$ și demonstrăm că 3 divide $2 \cdot (-2)^n + 1$

$$2 \cdot (-2)^n + 1 = -4 \cdot (-2)^{n-1} + 1 = -2 \left[2(-2)^{n-1} + 1 \right] + 3 : 3 \dots \text{2puncte}$$

Obținem că 9 divide $2^{2n+1} - (-2)^n - 1$, pentru orice număr natural nenul.**1punct**

2. a) Fie numărul $a = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2}$. Calculați $[a]$.

b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\lfloor x + 1 \rfloor + \lfloor [x] + 1 \rfloor = 2025$.

(Prelucrare pb S:L24.244 supliment GM 10-2024)

Soluție:

a) $a > 1$ **1punct**

$$a < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2024 \cdot 2025} = 2 - \frac{1}{2025} < 2. \dots \text{1punct}$$

Rezultă $[a]=1$ **1punct**

b) I. $x \geq -1 \Rightarrow [x] \geq -1$

Ecuația devine $\lfloor x + 1 \rfloor + [x] + 1 = 2025 \Rightarrow 2[x] = 2023$, imposibil**1punct**

II. $x < -1 \Rightarrow [x] < -1$

Obținem ecuația $|-x - 1| - [x] - 1 = 2025 \Leftrightarrow [-x] - [x] = 2027$1punct

1. Dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow -2x = 2027$, absurd.1punct

2. Dacă $x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow -k - 1 - k = 2027$, unde $k = [x]$ și obținem $k = -1014$
 $x \in (-1014, -1013)$1punct

3. Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive cu suma 1, demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{ab}}{1-c} + \frac{\sqrt{bc}}{1-a} + \frac{\sqrt{ac}}{1-b} \leq \frac{1}{8} \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Soluție:

$$\frac{\sqrt{ab}}{1-c} = \frac{ab}{a+b} \leq \frac{1}{2} \text{ (inegalitatea mediilor)}. \text{ 2punct}$$

$$\text{De unde obținem } \frac{\sqrt{ab}}{1-c} + \frac{\sqrt{bc}}{1-a} + \frac{\sqrt{ac}}{1-b} \leq \frac{3}{2}. \text{2punct}$$

$$\text{Demonstrăm că } \frac{1}{8} \left(3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9. \text{1punct}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (a+b+c) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} \right)^2 = 9 \text{2puncte}$$

4. Fie ABCDE un pentagon regulat, F mijlocul laturii BC, G intersecția dintre AB și CD și H intersecția dintre EF și AD.

c) Arătați că F este mijlocul segmentului EG.

d) Determinați numerele reale x și y astfel încât $\overrightarrow{HF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD}$

GM 9/2024

Cătălin Barbu, Bacău

Soluție:

$$\text{a) În } \triangle ABE, m(\angle BAE) = 108^\circ, AB = AE \Rightarrow m(\angle ABE) = 36^\circ$$

$$\text{În } \triangle BCG, m(\angle GBC) = m(\angle GCB) = 72^\circ \Rightarrow m(\angle BGC) = 36^\circ$$

Obținem că $m(\angle ABE) = m(\angle BGC) \Rightarrow BE \parallel GC$ 1punct

Analog $EC \parallel BG$ și deci EBGC este paralelogram, de unde rezultă că $EG \cap BC = \{F\}$ și F este mijlocul segmentului EG.2puncte

$$\text{b) } m(\angle GBC) = m(\angle GAD) = 72^\circ \Rightarrow BC \parallel AD \text{1punct}$$

$BG = GC, BF = CF \Rightarrow GE \perp AD$ și cum $AE = ED$ rezultă că H este mijlocul lui AD.1punct

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \text{ și } \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} \text{1punct}$$

Adunând cele două relații obținem:

$$\overrightarrow{HF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}$$

.....1punct