

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**7.02.2025**

**clasa a IX-a**

1. Arătați că pentru orice  $n$  număr natural nenul, numărul  $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$  se divide cu 9.

2. a) Fie numărul  $a = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2025^2}$ . Calculați  $[a]$ .

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $||x + 1|| + |[x] + 1| = 2025$ .

(Prelucrare pb S:L24.244 supliment GM 10-2024)

3. Dacă  $a, b, c$  sunt numere reale strict pozitive cu suma 1, demonstrați inegalitatea:

$$\frac{\sqrt{ab}}{1-c} + \frac{\sqrt{bc}}{1-a} + \frac{\sqrt{ac}}{1-b} \leq \frac{1}{8} \left( 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

4. Fie ABCDE un pentagon regulat, F mijlocul laturii BC, G intersecția dintre AB și CD și H intersecția dintre EF și AD.

c) Arătați că F este mijlocul segmentului EG.

d) Determinați numerele reale  $x$  și  $y$  astfel încât  $\overrightarrow{HF} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{CD}$

GM 9/2024  
Cătălin Barbu, Bacău

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.